Adı Soyadı: 17.06.2022
Numarası:

2021-2022 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) Regüler halka, asal ideal, indirgenemez eleman, maksimal ideal kavramlarını tanımlayınız.

   b) R bir halka, I, R'nin bir ideali olsun. $R:I=\{a\in R:\forall u\in R \text{ için } ua\in I\}$ kümesinin R'nin bir ideali olduğunu gösteriniz.

2) a) $-8+11i$ ve $2i-3$ Gauss tam sayılarının obebini bulunuz.

   b) $11+7i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlara ayırınız.

3) a) $(\mathbb{Z},+,.)$ halkası ve $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ için $a\oplus b=a+b-1$ ve $a\odot b=a+b-ab$ işlemleriyle $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ halkası veriliyor.
$$f:(\mathbb{Z},+,.)\to(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$$
$$a\to f(a)=1-a$$
ile tanımlı f fonksiyonu bir halka homomorfizması olur mu? Araştırınız.

   b) $x^6+36x^5+165x^4+305x^3+270x^2+117x-98\in\mathbb{Z}[x]$ polinomunun asal olup olmadığını belirtiniz.

4) a) R birimli ve değişmeli bir halka, $P\neq R$ olsun. P asal ideal ise R/P Tamlık bölgesidir, ispatlayınız.

   b) R,S iki halka, $f:R\to S$ bir halka epimorfizması olsun. I, Bu durumda S 'nin ideali ise $f^{-1}(I)$ da R'nin $Çek\ f$ i kapsayan bir idealidir, gösteriniz.

5) a) $\mathbb{Z}_{53}$ halkasının bütün ideallerini bulunuz.

   b) 553 elemanını kullanarak $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-61}\right]$ halkasının TAÇ bölge olup olmadığını belirleyiniz (Yol gösterme $553=(2+3\sqrt{-61})(2-3\sqrt{-61})$) ..

Başarılar…

Cebir II Final Cevap Anahtarı

1 a) Tanımlar notlarda mevcuttur

b) R, halka I, R'nin ideali olsun.

$R:I = \{ a \in R : \forall u \in R$ için $ua \in I \}$ kümesinin R'nin ideali old. gösterelim.

$R:I \neq \emptyset$: $0_R \in R$ dir $u.0_R = 0_R \in I \Rightarrow 0_R \in R:I$

$R:I \subseteq R$: Küme tanımından açıktır.

$\forall a,b \in R:I$ için $a-b \in R:I$ old. gösterelim.

$\forall u \in R$ için $ua \in I \wedge ub \in I$ dir.

$u(a-b) = ua - ub \underset{I \text{ ideal old.}}{\in} I \Rightarrow a-b \in R:I$

$\forall r \in R$, $\forall a \in R:I$ için $ra \in R:I \wedge ar \in R:I$ olur mu?

$\forall u \in R$ için $ua \in I$ dir. $u(ra) = \underbrace{(ur)}_{\in R}.a \underset{I,\ R'\text{nin ideali}}{\in} I \Rightarrow ra \in R:$

Benzer şekilde $u.(ar) = \underbrace{(ua)}_{\in I}.\underbrace{r}_{\in R} \in I \Rightarrow ua \in R:I$

2 a) $\dfrac{-8+11i}{-3+2i}_{(-3-2i)} = \dfrac{(-8+11i)(-3-2i)}{13} = \dfrac{46-17i}{13} \cong 4-i$

$-8+11i = (-3+2i).(4-i) + k_1$

$\boxed{2 = k_1}$

$\dfrac{-3+2i}{2} \cong -\dfrac{3}{2} + i \cong -1+i$

$-3+2i = 2(-1+i) + k_2$

$\boxed{-1 = k_2}$

$\dfrac{2}{-1} = -2$ $\boxed{k_3 = 0}$. Eboblari -1 dir. Aralarında asaldırlar.

Scanned with CamScanner

2 b) $11+7i$ 'yi asal çarpanlarına ayıralım.

$11+7i = \alpha \cdot \beta$

$d(11+7i) = d(\alpha) \cdot d(\beta)$

$170 = d(\alpha) \cdot d(\beta)$

$\Rightarrow d(\alpha) = 1, 2, 5, 10, 17,$

$d(\alpha)=2 \Rightarrow \alpha = 1+i$ alınırsa

$\frac{11+7i}{1+i} = \frac{(11+7i)(1-i)}{2} = \frac{18-4i}{2} = 9-2i$

$(1-i)$

$11+7i = (1+i)(9-2i)$

$9-2i = \theta \cdot \gamma$

$d(9-2i) = d(\theta) \cdot d(\gamma)$

$85 = d(\theta) \cdot d(\gamma)$

$d(\theta) = 1, 5,$

$d(\theta)=5 \Rightarrow \theta = 2+i$ yada $2-i$ olabilir

$\frac{9-2i}{2+i} \notin \mathbb{Z}[i] \Rightarrow \frac{9-2i}{2-i} = \frac{(9-2i)(2+i)}{5}$

$= 4-i$

$$\boxed{11+7i = (1+i)(2-i)(4-i)}$$

3) a) $f: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ $\quad a \oplus b = a+b-1$

$a \longrightarrow f(a) = 1-a$ $\quad a \odot b = a+b-ab$

f'nin homomorfizma olması için

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $\quad f(a+b) = 1-(a+b) = 1-a-b$

$f(a) \oplus f(b) = (1-a) \oplus (1-b)$

$= (1-a) + (1-b) - 1$

$= 1-a-b$

$$\boxed{f(a+b) = f(a) \oplus f(b)}$$

$f(ab) = 1-ab$

$f(a) \odot f(b) = (1-a) \odot (1-b)$

$= (1-a) + (1-b) - (1-a)(1-b)$

$= (1-a) + (1-b) - (1-b-a+ab)$

$= 1-a+1-b-$

$= 1-ab$ $\quad f$ bir homomorfizmadır.

$\boxed{f(ab) = f(a) \odot f(b)}$ olur.

3 b) $x^6+36x^5+165x^4+305x^3+270x^2+117x-98$

polnomu $\mathbb{Z}[x]$ de asal olur mu?

→ Eisenstein uygulanamaz

$f(x+1) = x^6+42x^5+360x^4+1345x^3+2550x^2+2418x+\ldots$

olup Eisenstein uygulanamaz

$$
\begin{aligned}
f(x-1) = {} & x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1+ \\
& +36x^5-180x^4+360x^3-360x^2+180x-36 \\
& +165 \quad +165x^4-660x^3+990x^2-660x+165 \\
& +305x^3-915x^2+915x-305 \\
& +270x^2-540x+270 \\
& +117x-117 \\
& -98
\end{aligned}
$$

$$= x^6+30x^5-15x^3+6x-120$$

$\pi=3$ alınırsa i) $3 \mid -120$, $3 \mid 6$, $3 \mid -15$, $3 \mid 30$

ii) $3 \nmid 1$

iii) $9 \nmid -120$

Eisensteina göre $f(x-1)$ indirgenemez $\mathbb{Q}[x]$ de. O halde $f(x)$ $\mathbb{Q}[x]$ de indirgenemez yani asaldır. Polinom ilkel olduğundan $f(x)$ $\mathbb{Z}[x]$ de de asaldır.

4 a) Teorem ispatı notlarda mevcuttur.

b) Teorem " " " .

5 a) $\mathbb{Z}_{53}$ sonlu Tamlık bölgesi yani cisimdir.

Cismin iki ideali vardır. Onlar da aşikar ideallerdir.

Yani $I=\{\bar{0}\}$, $I=\mathbb{Z}_{53}$.

Scanned with CamScanner

5 b) 553 elemanı için $\mathbb{Z}[\sqrt{-61}]$ halkasında

$(a+b\sqrt{-61})(a-b\sqrt{-61}) = a^2+61b^2 = 553$

$a=2$ $b=3$ alınırsa $553 = (2+3\sqrt{-61})(2-3\sqrt{-61})$

$553 = 7.79$ olur.

Ayrıca

$7=\alpha.\beta \Rightarrow d(7)=d(\alpha).d(\beta)$

$\Rightarrow 49 = d(\alpha).d(\beta)$

$d(\alpha)=1,7,49$

$\alpha = a+b\sqrt{-61} \Rightarrow a^2+61b^2=7$ ise $a,b \notin \mathbb{Z}$

$79=\alpha.\beta \Rightarrow d(79)=d(\alpha).d(\beta)$

$d(\alpha)=1,79,79^2$

$a^2+61b^2=79$ ise $a,b \notin \mathbb{Z}$

$2+3\sqrt{-61} = \alpha.\beta$

$d(2+3\sqrt{-61}) = d(\alpha).d(\beta)$

$553 = d(\alpha).d(\beta)$

$\Rightarrow d(\alpha) = 1,7,79,553$

$a^2+61b^2=7$ ise $a,b\notin \mathbb{Z}$

$a^2+61b^2=79$ ise $a,b\notin\mathbb{Z}$

O halde indirgenemez elemanların çarpımı olarak tek türlü yazılamaz. Yani TAG değildir.